Probabilités

Probabilité sur un ensemble fini

Définition

On appelle probabilité définie sur Ω

Toute application p définie de P (Ω) dans $[0,1]$ tels que :

$p(\Omega)=1$ et pour tous événements incompatibles A et B $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

On dit alors que le triplet (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

Propriétés

- p($\overline{A}$)= 1 – p(A) et $p(\emptyset)= 0$
- p(A $\cup$ B) = p(A) + p(B) – p($A \cap B$)
- Si A_1 , A_2 , A_3, … , A_k sont des événements incompatibles deux à deux alors

  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_k)$

Probabilité uniforme

- Soit (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

Pest une probabilité uniforme si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables

- si A $\subset \Omega$ alors $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

© najah.com®

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

On désigne par A et B deux événements de Ω tel que p(B) $\neq$ 0

La probabilité conditionnelle de A par B est le nombre noté p(A / B) ou p_B(A) et défini par p(A/B) = $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Conséquences :

Pour tous A et B événements de Ω on a

1) $p(A \cap B) = p(A/B) \times p(B)$ avec p(B) $\neq$ 0

2) P(A) = $p(A/B) \times p(B) + p(A/\overline{B}) \times p(\overline{B})$

Définition

A et B deux événements de Ω

A et B sont indépendants Si p(A) = p(A/B)

Conséquence

A et B sont deux événements indépendants de Ω si p($A \cap B$) = p(A).p(B)

Variable aléatoire

Définition

On appelle variable aléatoire ou aléa numérique toute application X définie de Ω sur IR

Définition

(Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω

On note X(E) L'ensemble image de E par X Tel que

X(Ω) = $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{p-1}, x_p\}$; $p \in \square^*$

On appelle loi de probabilité de X l'application p_X tel que

© najah.com®

$$p_X : X(\Omega) \to [0,1] \quad x_i \mapsto p(X=x_i) \quad \text{avec } \{X = x_i\} = \{a \in \Omega, X(a) = x_i\}$$

Conséquence

Si X une variable aléatoire définie sur Ω tel que

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{p-1}, x_p\}$; $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\sum_{i=1}^{p} p(X = x_i) = 1$

Espérance mathématique

Soit (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

- X une variable aléatoire définie sur E telle que

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{p-1}, x_p\}$

On appelle espérance mathématique de X ou moyenne le nombre

$E(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i \, p(X = x_i)$

- X et Y sont deux variables aléatoires définie sur E

Pour tout réel α $E(\alpha X) = \alpha E(X)$; $E(X)+E(Y)=E(X+Y)$

Variance

Soit (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini

- X une variable aléatoire définie sur Ω

  - On appelle variance de X le nombre

    $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

  - On appelle écart type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Fonction de répartition

Soit (Ω, P (Ω),p) est un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω

© najah.com®

On appelle fonction de répartition de X , l'application définie de IR dans $[0,1]$ par

$f : x \to p(X \leq x)$

Loi binomiale - Schéma de Bernoulli

Si une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues contraires : S succès et E échec

Soit p la probabilité de l'événement succès

Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

La loi de probabilité de la variable aléatoire X associée au nombre de fois où S est réalisé

Est donnée par : $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,..,n\}$,son espérance est

E(X) = np et sa variance est V(X) = np(1-p)

Exemples de lois continues

Loi uniforme

Soit a et b deux réels tel que :a $\prec$ b on note I= $[a,b]$

Soit f la fonction définie sur I par : f(x) = $\frac{1}{b-a}$

On appelle loi uniforme sur l'intervalle I, la loi de probabilité continue dont la densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$

Pour cette loi ainsi définie la probabilité d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ de I est

$$p([\alpha,\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\, dx$$

Variable aléatoire

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi probabilité uniforme

©najah.com®

si $p(\alpha \le X \le \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

Fonction de répartition

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$

On appelle fonction de répartition de X , l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, a[\\ p(a \le X \le x) & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x \succ b \end{cases}$$

Définition : la loi exponentielle

On appelle loi exponentielle sur l'intervalle I, la loi de probabilité continue dont la densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel positif

Pour cette loi ainsi définie la probabilité d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}_+$ est

$p([\alpha,\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$ et $p([\alpha,+\infty[) = e^{-\lambda\alpha}$ où α et β deux réels de $\mathbb{R}_+$

Variable aléatoire

On dit qu'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}_+$ suit la loi exponentielle de paramètre λ

si $p(\alpha \le X \le \beta) = e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda\alpha}$ et $p(X \ge \alpha) = e^{-\lambda\alpha}$

Fonction de répartition

Soit X une variable qui suit la loi exponentielle p de paramètre λ

On appelle fonction de répartition l'application : $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ telque

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \prec 0 \\ p(a \le X \le x) & \text{si} \quad x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

© najah.com®